



الامتحان السداسي الثاني في التحليل العددي 2

2022/06/09

قسم: تكنولوجيا المدة: ساعتان 3.أ.ت.ث-ه.كهربائية

التمرين الأول (6 نقاط) (Micro):

لتكن الجملة ذات المعادلات غير الخطية التالية:

$$\begin{cases} 6x + yz + z = 1 \\ xy + 7y - z = 2 \\ -x - y^2 + 9z = -3 \end{cases} \quad (1)$$

حيث: $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $|x| < 1$ ، $|y| < 1$ ، $|z| < 1$

حل هذه الجملة نستعمل طريقة النقطة الثابتة (التقريبات المتتالية).

(1) أوجد المصفوفة اليعقوبية $J(X)$ المرفقة بالجملة (1).

(2) أحسب: $\|G\|_1$ ، $\|G\|_2$ ، $\|G\|_\infty$ ، حيث: $G = g_{ij} = \sup_{|x|, |y|, |z| < 1} |J(X)|$.

(3) هل هذه الطريقة متقاربة؟ علل.

(4) حل الجملة (1) بثلاث تكرارات و بالتقريب الي 10^{-4} .

التمرين الثاني (04 نقاط):

لتكن مسألة كوشي التالية:

$$\begin{cases} y'(t) = -y^2(t), & t \in [1; 1,6]. \\ y(1) = 1, & h = 0,2. \end{cases} \quad (2)$$

(1) بين أن $y(t) = \frac{1}{t}$ هو الحل الصحيح للمسألة (2).

(2) أوجد التقريبات للحل $y(t)$ بطريقة رونج كوتا من الرتبة 2 و بالتقريب الي 10^{-5} .

(3) أحسب الخطأ الفعلي E_a عند اللحظة $t = 1,6$ و بالتقريب الي 10^{-5} .

التمرين الثالث (06 نقاط):

لتكن مسألة كوشي التالية:

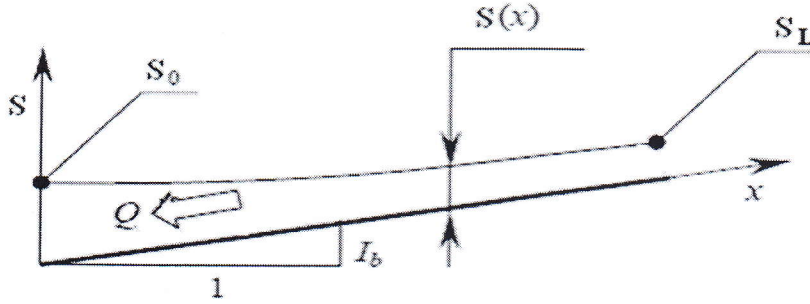
$$\begin{cases} y'(t) = -\beta y(t), & t > 0, \beta \in \mathbb{R}_+^* \\ y(0) = \alpha \end{cases} \quad (3)$$

- (1) أوجد الحل الصحيح للمسألة (3).
- (2) باستعمال طريقة أولير أكتب w_{i+1} بدلالة w_i ، β و h حيث: $w_i = y(t_i)$ هي القيمة التقريبية للحل y عند اللحظة t_i .
- (3) أستنتج عبارة w_i بدلالة w_0 ، β ، h و i .
- (4) تكون طريقة أولير مستقرة اذا تحقق الشرط: $\lim_{i \rightarrow +\infty} w_i = 0$ ، ما هي القيم h التي تكون من أجلها هذه الطريقة مستقرة.
- (5) أثبت أن طريقة رونج كوتا من الرتبة 4 يمكن كتابتها على المسألة (3) بالصيغة التالية:

$$w_{i+1} = \left(1 - h\beta + \frac{1}{2}(h\beta)^2 - \frac{1}{6}(h\beta)^3 + \frac{1}{24}(h\beta)^4\right)w_i$$

التمرين الرابع (04 نقاط):

نعتبر تدفق الماء في قناة حسب الشكل الآتي:



حيث يمثل $S(t)$ ارتفاع الماء بدلالة الزمن t داخل القناة و الذي يحقق المعادلة التفاضلية التالية:

$$Q = K S^{\frac{3}{2}} \sqrt{I_b + \frac{dS(t)}{dt}} \quad (4)$$

I_b : ميل القناة بالنسبة للأرض، Q : تدفق الماء في القناة، S_0 : ارتفاع الماء في القناة عند اللحظة $t_0 = 0$.

(1) أكتب المعادلة التفاضلية (4) على شكل مسألة كوشي (بتعويض جميع المعطيات).

(2) باستعمال طريقة أولير أكتب العبارة S_{i+1} بدلالة S_i .

(3) أحسب بالتقريب الي 10^{-4} الارتفاع $S_L = S_1$ (التكرار الأول)، علما أن $h = L$.

المعطيات: $L = 5m$ ، $Q = 1m^3/s$ ، $K = 20m^{1.5}/s$ ، $S_0 = 2m$ ، $I_b = 0,05m$

بالتوفيق

$$X^{(1)} = g(X^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0,1666 \\ 0,2857 \\ -0,3333 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$X^{(2)} = g(X^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0,2380 \\ 0,2312 \\ -0,3057 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$X^{(3)} = g(X^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0,2294 \\ 0,2341 \\ -0,3009 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

طى المقس (2) : (04 نقاط)

$$\begin{cases} y'(t) = -y^2(t) \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

1) الحل الصحيح : $y(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow y'(t) = -\frac{1}{t^2} \Rightarrow y'(t) = -\left(\frac{1}{t}\right)^2 = -y^2(t)$ (0,5)

2) الحل الصحيح للمعادلة (2) هو : $y(t) = \frac{1}{t}$ (0,5)

3) ايجاد التقريبات الحل (تاي) :

مبدأ خوارزمية كوتس كوتا من الدرجة 2 :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} (M_1 + M_2) \end{cases} \quad (0,25)$$

حيث : $M_1 = F(t_i, y_i)$, $M_2 = F(t_{i+1}, w_i + h M_1)$

بتطبيق الخوارزمية السابقة على المثال : $h=0,2 \rightarrow [1; 1,6]$

تفاصيل الحساب :

$i=0$
 $i=1$

t_i	1	1,2	1,4	1,6
M_1	-1,00000	-0,69890	-0,51500	
M_2	-0,64000	-0,48472	-0,37778	
w_i	1,000000	0,83600	0,71764	0,62836

(0,25)

$y_{\text{exact}}(1,6) = 0,62500$, $w_3(1,6) = 0,62836$

$E_a = |y_{\text{exact}} - w_3| = 0,00336$ (0,5)

(3)

تصحيح الامتحان السادس الثاني
في مادة التحليل العددي 2

حل المسألة (1): (06 نقاط).

حول المسألة إلى الشكل: $f(x) = x$

$$(1) \begin{cases} 6x + yz + z = 1 \\ xy + 7y - z = 2 \\ -x - y^2 + 9z = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{6}(1 - yz - z) \\ y = \frac{1}{7}(2 - xy + z) \\ z = \frac{1}{9}(-3 + x + y^2) \end{cases} \quad (0,5)$$

(1) الجاد المصفوفة التفاضلية $J(x)$

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x} & \frac{\partial g_3}{\partial y} & \frac{\partial g_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6}z & -\frac{y+1}{6} \\ -\frac{1}{7}y & -\frac{1}{7}x & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9}y & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$(2) \quad \|G\|_\infty = \|G\|_2 = \|G\|_1 = 0 \text{ عند } \lim$$

$$G = (g_{ij}) = \sup |J(x)|_{|x|, |y|, |z| < 1}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

$$\|G\|_1 = \max_i \sum_j |g_{ij}| = \max \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \quad (0,5) \rightarrow = 0,5317$$

$$\|G\|_\infty = \max_j \sum_i |g_{ij}| = \max \left(\frac{16}{63}, \frac{67}{126}, \frac{10}{21} \right) = \frac{67}{126} \quad (0,5) \rightarrow = 0,5317$$

$$\|G\|_2 = \left(\sum_j |g_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{0,5317^2}{15876} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (0,5) \rightarrow = 0,5317$$

(3) في نظام القيم المتغيرة G في الحالة (1) لا يمكن إيجاد $\|G\| < 1$ في 100 نقطة التكرار المتتالية. 0,5

(4) حل المسألة (1)

الصفة المتكررة لطريقة التكرار المتتالية:

$$x^{(n+1)} = g(x^{(n)}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}(1 - y_n z_n - z_n) \\ \frac{1}{7}(2 - x_n y_n + z_n) \\ \frac{1}{9}(-3 + x_n + y_n^2) \end{pmatrix} \quad (0,5)$$

```
1.0000000000000000 1.2000000000000000 1.4000000000000000 1.6000000000000000
```

M1 =

```
-1.0000000000000000 -0.6588960000000000 -0.515004384822895
```

M2 =

```
-0.6400000000000000 -0.484723402352640 -0.377778866480514
```

w =

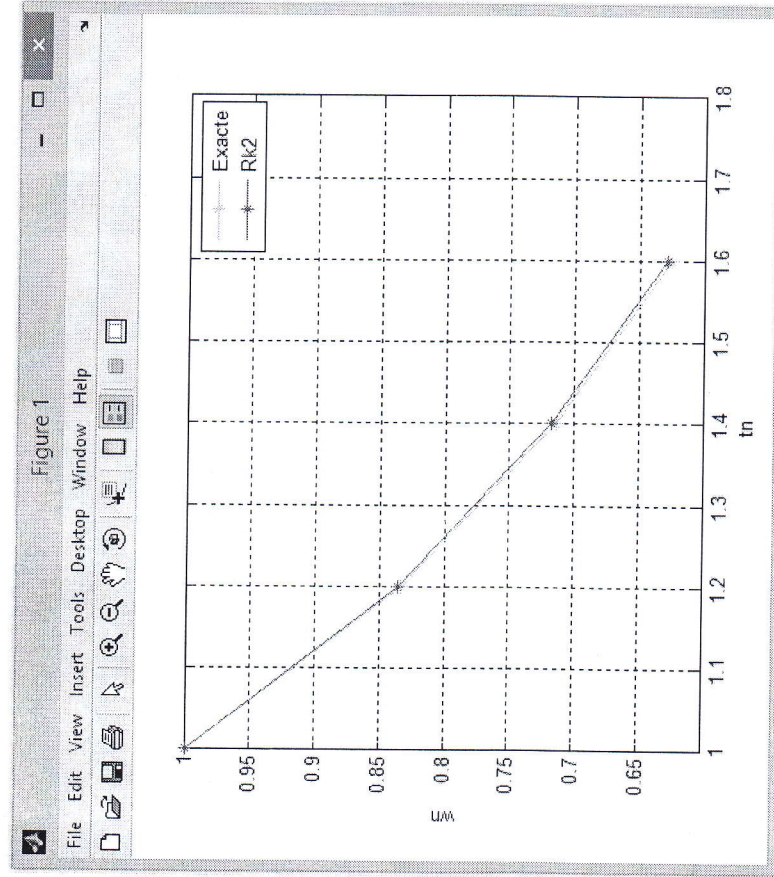
```
1.0000000000000000 0.8360000000000000 0.717638059764736 0.628359734634395
```

yex =

```
1.0000000000000000 0.833333333333333 0.714285714285714 0.6250000000000000
```

e0 =

```
0 0.0026666666666667 0.003352345475022 0.003359734634395
```



Start

$$S_{i+1} = S_i + h F(t_i, S_i)$$

(2) طريقة أويلر

i=0: $S_L = S_1 = S_0 + h F(t_0, S_0)$

$$= S_0 + h \left(\frac{0,0025}{S_0^3} - 0,05 \right)$$

$$= 2 + 5 \left(\frac{0,0025}{(2)^3} - 0,05 \right)$$

$$= 1,7516 \text{ m}$$

$$\begin{cases} y'(t) = -\beta y(t), t > 0, \beta \in \mathbb{R}^+ \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

المسألة (3): (06 نقاط)

1) الحل الصحيح للمعادلة (3):

$$y'(t) = -\beta y(t) \Leftrightarrow \frac{dy(t)}{dt} = -\beta y(t) \Leftrightarrow \frac{dy(t)}{y(t)} = -\beta dt$$

$$\int \frac{dy(t)}{y(t)} = -\int \beta dt \Leftrightarrow \ln y = -\beta t + C \Leftrightarrow y = e^{-\beta t + C}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = k e^{-\beta t}} \quad \text{د.س.}$$

$$y(0) = \alpha \Leftrightarrow \alpha = k e^{-\beta \cdot 0} \Leftrightarrow \boxed{k = \alpha}$$

$$\boxed{y(t) = \alpha e^{-\beta t}} \quad \text{د.س.}$$

2) فوارصة طريقة (توليد):

$$w_{i+1} = w_i + hF(t_i, w_i)$$

$$= w_i + h(-\beta w_i)$$

$$= w_i - h\beta w_i$$

$$\boxed{w_{i+1} = (1 - h\beta) w_i} \quad \text{د.س. (1)}$$

$$w_i = (1 - h\beta) w_{i-1}$$

$$\Leftrightarrow w_{i+1} = (1 - h\beta) w_i \quad \text{د.س. (3)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$w_i = (1 - h\beta)^2 w_{i-2}$$

$$w_i = (1 - h\beta)^i w_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{w_i = (1 - h\beta)^i w_0} \quad \text{د.س. (1)}$$

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} w_i = 0$$

4) طريقة توليد مستقرة

$$\Leftrightarrow$$

$$|1 - h\beta| < 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$-1 < 1 - h\beta < 1$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\textcircled{1} \quad -2 < -h\beta < 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 < h\beta < 2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\boxed{0 < \frac{1}{\beta} < \frac{2}{\beta}}$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6} [k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4] \quad (5)$$

$$k_1 = \ln F(t_i, w_i) = \ln [-\beta y(t)] = -\ln \beta w_i$$

$$k_2 = \ln F(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1) = \ln [-\beta(w_i + \frac{1}{2}k_1)] \\ = -\ln \beta (w_i - \frac{1}{2} \ln \beta w_i) = -\ln \beta w_i + \frac{1}{2} \ln^2 \beta^2 w_i$$

$$k_3 = \ln F(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2) = \ln [-\beta(w_i + \frac{1}{2}k_2)] \\ = -\ln \beta (w_i + \frac{1}{2}(-\ln \beta w_i + \frac{1}{2} \ln^2 \beta^2 w_i)) \\ = -\ln \beta w_i + \frac{1}{2} \ln^2 \beta^2 w_i - \frac{1}{4} \ln^3 \beta^3 w_i \quad (1)$$

$$k_4 = \ln F(t_i + h, w_i + k_3) = -\ln \beta (w_i + k_3) \\ = -\ln \beta (w_i - \ln \beta w_i + \frac{1}{2} \ln^2 \beta^2 w_i - \frac{1}{4} \ln^3 \beta^3 w_i) \\ = -\ln \beta w_i + \ln^2 \beta^2 w_i - \frac{1}{2} \ln^3 \beta^3 w_i + \frac{1}{4} \ln^4 \beta^4 w_i$$

النتيجة النهائية

$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6} [-\ln \beta w_i - 2\ln \beta w_i + \ln^2 \beta^2 w_i - 2\ln \beta w_i \\ + \ln^2 \beta^2 w_i - \frac{1}{2} \ln^3 \beta^3 w_i - \ln \beta w_i + \ln^2 \beta^2 w_i - \frac{1}{2} \ln^3 \beta^3 w_i \\ + \frac{1}{4} \ln^4 \beta^4 w_i]$$

$$= w_i - \ln \beta w_i + \frac{1}{2} \ln^2 \beta^2 w_i - \frac{1}{6} \ln^3 \beta^3 w_i + \frac{1}{24} \ln^4 \beta^4 w_i \quad (1)$$

$$= (w_i - \ln \beta w_i + \frac{1}{2} (\ln \beta)^2 w_i - \frac{1}{6} (\ln \beta)^3 w_i + \frac{1}{24} (\ln \beta)^4 w_i)$$

$$= (1 - \ln \beta + \frac{1}{2} (\ln \beta)^2 - \frac{1}{6} (\ln \beta)^3 + \frac{1}{24} (\ln \beta)^4) w_i$$

(النتيجة 04) : (4) النتيجة النهائية

$$Q = K S^{\frac{3}{2}} \sqrt{I_b + \frac{dS(t)}{dt}} \Leftrightarrow Q = K S^{\frac{3}{2}} \sqrt{I_b + S'(t)} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q}{K S^{3/2}} = \sqrt{I_b + S'(t)} \Leftrightarrow \frac{Q^2}{K^2 S^3} = I_b + S'(t)$$

$$\Leftrightarrow S'(t) = \frac{Q^2}{K^2 S^3} - I_b \quad (1)$$

النتيجة النهائية

$$\int S'(t) = \frac{Q^2}{K^2 S^3} - I_b = F(t, S)$$

$$\begin{cases} S(0) = S_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S'(t) = \frac{0,0085}{S^3} - 0,05 \\ S(0) = 2 \end{cases} \quad (0,5)$$

$$S_{i+1} = S_i + h F(t_i, S_i)$$

$$= S_i + 5 \left(\frac{0,0025}{S_i^3} - 0,25 \right)$$

$$\boxed{S_{i+1} = S_i + \left(\frac{0,0125}{S_i^3} - 0,25 \right)}$$

(2) كبر ١

1

(3) S_L عتبار، $\emptyset$ value

$i=0$:

$$S_L = S_1 = S_0 + h F(t_0, S_0)$$

$$= S_0 + \cancel{5} \left(\frac{0,0125}{S_0^3} - 0,25 \right)$$

$$= 2 + \left(\frac{0,0125}{(2)^3} - 0,25 \right)$$

$$= 1,7516 \text{ m}$$

1,5